Institut des Sciences
Appliquées et Économiques
ISAE-Cnam Liban
Centre du Liban Associé au CNAM de Paris

Avril -Durée:1h30
Partiel
2016-2017

Sujet proposé par: J.Saab
pour le centre d'enseignement de:
Beyrouth
Langue de l'éxamen: Français

Est autorisé:
Calculatrice Programmable

Partiel
Analyse numérique matricielle - CSC104

1. (8pts) Le conditionnement d'une matrice inversible $A \in M_n(\mathbb{R})$ relativement à une norme matricielle $||.||$ est

$$cond(A) = ||A||.||A^{-1}||$$

Montrer que:

(a) $cond(A) \geq 1$

(b) Pour tout $\alpha \neq 0$, $cond(\alpha A) = cond(A)$

(c) $cond_2(A) = \sqrt{\dfrac{\max\limits_i |\lambda_i(A^*A)|}{\min\limits_i |\lambda_i(A^*A)|}}$ où les nombres $\lambda_i(A^*A)$ sont les valeurs propres de la matrice hermitienne A^*A et $cond_2$ est le conditionnement relatif à la norme subordonnée à la norme euclidienne.

(d) Si A est symétrique alors $cond_2(A) = \dfrac{\max\limits_i |\lambda_i(A)|}{\min\limits_i |\lambda_i(A)|}$

(e) Si U est une matrice orthogonale alors

$$\begin{cases} cond_2(U) & = & 1 \\ \text{et} & & \\ cond_2(AU) & = & cond_2(UA) = cond_2(A) \end{cases}$$

---

2. (6pts) Soit $A \in M_N(\mathbb{R})$, symétrique définie positive et pleine. On cherche à résoudre le système $A^2x = b$. On propose deux méthodes

(a) Calculer A^2, effectuer la décomposition $(L)(^tL)$ de A^2, résoudre le système $(L)(^tL)x = b$

(b) Calculer la décomposition $(L)(^tL)$ de A, résoudre les systèmes $(L)(^tL)y = b$ et $(L)(^tL)x = y$

Calculer le nombre d'opérations élémentaires nécessaires pour chacune des deux méthodes et comparer.

---

3. (6pts) On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 8 & 11 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculer la factorisation LU de A en précisant à chaque étape la matrice $L^{(k)}$. Vérifier que $L = L^{(n-1)}...L^{(1)}$ est triangulaire inférieure et que $L.A^{(n-1)} = LU = A$. En déduire le déterminant de A.
